Leçon 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

RM
2022-2023

Soit $\mathbb{K}$ un corps qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Solutions d'équations différentielles linéaires

1.1 Définitions et premières propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $f : \Omega \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : Une équation différentielle résolue par rapport à la dérivée est de la forme $y' = f(t, y)$. Une solution est une fonction dérivable y sur I telle que $y' = f(t, y)$ pour tout t dans I.

Exemple 2 : La fonction $y(t) = t^2$ est une solution des équations différentielles $y' = 2t, ty' - 2y = 0, (y')^2 - 4y = 0$.

Définition 3 : Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times (\mathbb{K}^N)^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{K}^N$. Une équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^N$ est de la forme $y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{[n-1)})$.

Remarque 4 : Si $N = 1$, on parle d'équation différentielle scalaire. Sinon d'équation différentielle vectoriel.
Il est important de préciser sur quel intervalle I une fonction y est solution.

Proposition 5 : En considérant $Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, l'équation différentielle d'ordre n dans $\mathbb{K}^n$ est équivalente à l'équation différentielle d'ordre 1 dans $\mathbb{K}^{nN}$ suivante : $Y' = F(t, Y)$ avec $F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{(n-1)} \\ f(t, Y) \end{pmatrix}$.

Remarque 6 : Cela nous permet de nous concentrer sur la résolution des équations différentielles d'ordre 1. On sa ramène donc à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

Exemple 7 : On ramène l'équation différentielle $y'' = yy' - ty^3$ sous la forme $Y' = f(t, Y)$ en posant $Y = \begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F(t, Y) = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_0 Y_1 - tY_0^3 \end{pmatrix}$.

Définition 8 : On dit que l'équation $y' = f(t, y)$ est une équation différentielle linéaire si $f(t, y) = A(t)y + B(t)$ où A et B sont des fonctions du temps à valeurs respectives dans $M_N(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^N$. Les autres formes d'équations différentielles sont qualifiées de non linéaire.

Définition 9 : Si $B = 0$, on parle d'équation différentielle homogène. Si B est non identiquement nulle, on parle d'équation différentielle linéaire avec second membre.

1.2 Solutions d'une équation différentielle linéaire

On appelle $(\mathcal{L})$ l'équation différentielle $y' = A(t)y + B(t)$ avec $(t, y) \in I \times \mathbb{K}^N$ et $(\mathcal{L}_H)$ l'équation homogène associé.

Théorème (de Cauchy-Lipschitz linéaire) 10 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in C(I, M_n(\mathbb{K}))$, $B \in C(I, \mathbb{K}^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}^N$. Alors il existe une solution et une seule $y : I \mapsto \mathbb{K}^N$ de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$.

Proposition 11 : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $A \in C(I, M_N(\mathbb{K}))$. Alors
i) L'ensemble S_H des solutions maximales de $(\mathcal{L}_H)$ est un sous-espace vectoriel de $C(I, \mathbb{K}_n)$ de dimension N.
Pour tout $t_0 \in I$, l'application $\Phi_{t_0} : y \in S_H \mapsto y(t_0) \in \mathbb{K}^N$ est un isomorphisme d'espace vectoriels.
L'ensemble des solutions de S de l'équation différentielle $(\mathcal{L})$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de direction S_H.

Exemple 12 : On considère l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$. Avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, le système s'écrit $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} Y$. L'ensemble des solutions est alors un espace de dimension 2, et on remarque que $y_0(t) = e^t$ et $y_1(t) = te^t$ sont solutions. Comme Y_0 et Y_1 sont libre, c'est alors une base des solutions et les solutions sont alors $y(t) = ae^t + bte^t$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition (Wronskien) 13 : Un système fondamental de solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{L}_H)$ est une famille $(y_1, ..., y_N)$ de N solutions indépendantes de $(\mathcal{L}_H)$. La matrice $\Phi(t) = (y_1(t), ..., y_N(t))$ vu comme vecteur colonnes est appelé une matrice fondamental de $(\mathcal{L}_H)$. Le déterminant de $\Phi(t)$ est appelé wronskien de ce système fondamental.

Exemple 14 : Une matrice fondamental de l'exemple au dessus est donc $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (1+t)e^t \end{pmatrix}$ et le wronskien est alors e^{2t}.

Proposition 15 : $\Phi(t)$ est une matrice fondamental pour $(\mathcal{L}_H)$ si et seulement si Φ est dérivable sur I et vérifie $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ pour tout $t \in I$ et si $\Phi(t)$ est inversible pour tout $t \in I$.

Proposition 16 : Soit $\Phi(t)$ une matrice fondamentale du système $(\mathcal{L}_H)$. La solution de $(\mathcal{L}_H)$ telle que $y(t_0) = y_0$ s'écrit $y(t) = \Phi(t)\Phi(t_0)^{-1}, t \in I$.

Exemple 17 : La solution maximal de l'exemple précédent pour $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ est $y(t) = (1+t)e^t$.

2 Résolution d'équation différentielles linéaires

2.1 Recherche de solutions homogènes

Proposition 18 : Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $\Phi(t) = e^{tA}$. Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\Phi'(t) = Ae^{tA} = e^{tA}A$.

Proposition 19 : Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Alors une matrice fondamentale pour le système $(\mathcal{L}_H)$ est $\Phi(t) = e^{tA}$. Les solutions de $(\mathcal{L}_H)$ sont les $y(t) = e^{tA}C$ ou C un vecteur constant de $\mathbb{K}^N$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{K}^n$, la solution de $(\mathcal{L}_H)$ telle que $y(t_0) = y_0$ s'écrit $y(t) = e^{(t-t_0)A}y_0$.

Remarque 20 : Il est alors très utile de savoir calculer l'exponentielle d'une matrice. On peut pour cela utiliser des techniques de réduction d'algèbre linéaire comme la décomposition de Jordan ou la réduction de Jordan. Cependant, il peut-être aussi difficile de calculer la décomposition de Jordan.

Exemple 21 : Résolvons le système $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y \end{cases}$. On a alors $Y' = AY$ avec $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. A est symétrique, donc diagonalisable de valeur propre 3 et -1, avec $e_3 = (1,1)$ et $e_{-1} = (1,-1)$ des vecteurs propres, on en déduit que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. On a donc $\exp(tA) = P \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} P^{-1}$.

Proposition 22 : Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Supposons que A soit diagonalisable sur $\mathbb{K}$. Notons v_k les vecteur propres associés aux valeurs propres v_k. Alors une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des solutions de $(\mathcal{L}_H)$ est donné par les $t \mapsto e^{\lambda_k t}v_k$.

Exemple 23 : On a que les solutions de l'exemple sont de la forme $x(t) = \alpha e^{3t} + \beta e^{-t}$ et $y(t) = \alpha e^{3t} - \beta e^{-t}$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 24 : Pour $N = 1$, la solution maximal de l'équation différentielle $y'(t) = a(t)y + b(t)$ avec la condition initial $y(t_0) = y_0$ (ou $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$) est

$$y(t) = y_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t b(s)e^{\int_s^t a(u)du}ds.$$

Définition 25 : On définit $(\mathcal{L}_n)$: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = b(t)$ et $(\mathcal{L}_{n,H})$: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1y' + a_0y = 0$ l'équation homogène associé avec $(t,y) \in I \times \mathbb{K}$ ou I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{K}$.
On note $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$ le polynôme caractéristique associé à $(\mathcal{L}_n)$, et $P(X) = 0$ est l'équation caractéristique associé à $(\mathcal{L}_n)$.

Théorème 26 : Les solutions complexes (donc on considère $a_k \in \mathbb{C}$) de $(\mathcal{L}_{n,H})$ sont de la forme $y(t) = (\lambda_{1,1}t^{m_1-1} + ... + \lambda_{1,m_1-1}t + \lambda_{1,m_1})e^{r_1t} + ... + (\lambda_{p,1}t^{m_p-1} + ... + \lambda_{p,m_p-1}t + \lambda_{p,m_p} = e^{r_pt}$ avec $\lambda_{j,k} \in \mathbb{C}$ des constantes quelconque et $r_1, ..., r_p$ les racines complexes de multiplicités $m_1, ..., m_p$, solution de l'équation caractéristique.
Autrement dit, une base de l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_{n,H})$ est formé par les $t \mapsto t^le^{r_kt}$ avec $1 \geq k \geq p, 0 \leq l \leq m_k - 1$.

Corollaire 27 : Si on impose les conditions initiales $y(t_0) = y_0, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_n$, alors il existe une et une seule solution de $(\mathcal{L}_{n,H})$.

Remarque 28 : On peut le voir comme la généralisation de la méthode classique que l'on utilise pour résoudre les équations différentielles linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Exemple 29 : Dans $\mathbb{R}$, l'équation différentielle $y'' - 3y' - 4y = 0$ a pour polynôme caractéristique $P(X) = X^2 - 3X - 4$, de racine -1 et 4. Les solutions sont donc $y(t) = \lambda e^{-t} + \mu e^{4t}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des constantes quelconques.

2.2 Recherche de solutions

Proposition 30 : La méthode de variation de la constante consiste à cherche une solution de $(\mathcal{L})$ sous la forme $y(t) = \Phi(t)C(t)$ ou l'on fait donc varier $C(t)$, qui est constant quand c'est solution de $(\mathcal{L}_H)$. On obtient que y est solution de $(\mathcal{L}_n)$ si et seulement si $Phi(t)C'(t) = B(t)$.
On trouve alors $C(t) = C(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(s)^{-1}B(s)ds$.

Proposition (Formule de Duhamel) 31 : La solution de $(\mathcal{L})$ telle que $y(t_0) = y_0$

est donné par

$$y(t) = Phi(t)Phi(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} Phi(t)Phi(s)^{-1}B(s)ds.$$

Exemple 32 : Grâce à la méthode de la variation de la constante, on trouve que la solution de $y'' - 2y' + y = e^t$ avec $y(-1) = 0$ et $y'(-1) = 1$ est $y(t) = (t^2/2 + t(e + 1) + e + 1/2)e^t$.

Remarque 33 : La méthode de la variation de la constante nous permet de trouver une solution particulière, et donc de finalemen résoudre notre équation différentielle linéaire.

Proposition 34 : L'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_n)$ est un $\mathbb{K}$-espace affine de dimension n et de direction l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{L}_{n,H})$. Si y_1 est une solution quelconque de $(\mathcal{L}_n)$, l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L}_n)$ est $\{y_1+y; y \text{ solution de } (\mathcal{L}_{n,H})\}$.

2.3 Équation de Sylvester

Théorème 35 : Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors pour tout $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, l'équation $AX + XB = C$ admet une unique solution X dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dev 1

3 Stabilité des solutions

Soit Ω' un ouvert de $\mathbb{K}^N$ et $f : I \times \Omega' \to \mathbb{K}^n$ continue et localement lipschitzienne. On s'intéresse à $y' = f(t, y)$. Soit y_{t_0,y_0} sa solution maximale pour $y(t_0) = y_0$.

Définition 36 : La solution y_{t_0,y_0} est stable à droite si :
$i)$ Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $y_1 \in \Omega'$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \alpha$, la fonction $y_{t_0,y_1}(t)$ est définie pour tout $t \geq t_0$.
$ii)$ Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, \alpha]$ tel que, pour tout $y_1 \in \Omega'$, si $\|y_1 - y_0\| \leq \eta$, alors $\|y_{t_0,y_1}(t) - t_{t_0,y_0}(t)\| \leq \varepsilon$ pour tout $t \geq t_0$.

Définition 37 : La solution y_{t_0,y_0} est dite asymptotiquement stable à droite si elle est stable à droite et attractive à droite, ie s'il existe $\delta > 0$ tel que $y_{t_0,y_1}(t) - y_{t_0,y_0}(t) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ pour tout $y_1 \in \Omega'$ tel que $\|y_1 - y_0\| \leq \delta$.

Remarque 38 : On peut aussi définir la stabilité à gauche, mais on s'intéresse physiquement quand on avance dans le temps.
La notion de stabilité peut se comprendre en disant qu'une solution est stable si de petites perturbations de la donnée initiale conduisent à de faibles variations des valeurs de la solution pour des temps ultérieurs.

Théorème 39 : Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$. Notons λ_i les valeurs propres de A. Les solutions de $y' = Ay$ sont :
$i)$ stable si et seulement si pour tout i, $Re(\lambda_i) < 0$ ou $Re(\lambda_i) = 0$ et le bloc de Jordan correspondant est diagonalisable.
$ii)$ asymptotiquement stables si et seulement si $Re(\lambda_i) < 0$ pour tout i.

Lemme 40 : Soit $\|.\|$ une norme d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement négative. Alors il existe $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ tels que, pour tout t positif ou nul, on ait $\|e^{tA}\| \leq \lambda e^{-\alpha t}$.

Théorème 41 : Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = 0$. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

On suppose que la matrice Df_0 (matrice de la différentielle de f en 0) a toutes ses valeurs propres de partie réelle strictement négative. Alors 0 est un point d'équilibre stable du système : pour tout y_0 suffisamment proche de 0, la solution maximal $y(t)$ est bien définie sur $[0, +\infty[$ et tend exponentiellement vite vers 0 quand $t \to +\infty$.

Dev 2

Références :

1. Équations différentielles Berthelin
2. Calcul diff Rouvière
3. isenmann (rip)